МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из математике

Број π

Ученик

Лазар Радосављевић, IV-ц

Ментор

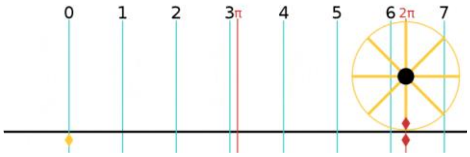
Бојана Матић

Београд, мај 2015

Садржај

Увод

Још у давним временима примећено је да је однос обима и пречника било ког круга исти и да износи мало више од три. Та вредност је различито називана: Архимедова константа (не мешати с Архимедовим бројем), Лудолфов број, а ознаку π, надахнуту грчким речима за кружницу ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\iota\alpha$) и обим ($\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$) уводи Вилијам Џонс у XVIII веку.



„Размотавање“ круга пречника 2

Први покушај експлицитног одређивања вредности броја π извршио је Архимед у III веку п. н. е. Успео је да тачно одреди три децимале (ако се узме средња вредност граница које је одредио). Данас су познате милијарде децимала овог броја. Међутим, од толиког броја децимала нема велике практичне користи: вредност броја π заокружена на само 35 децимала довољна је за израчунавање обима познатог свемира (круг пречника $5 \cdot 10^{26}$ m) с прецизношћу од једног нанометра.

Ма колико се трудили, никада нећемо бити у стању да тачну вредност броја π запишемо у децималном облику, будући да се ради о ирационалном броју. Ову особину је први доказао Јохан Хајнрих Ламберт 1761. године. Тридесетак година касније Адријан-Мари Лежандр је доказао да је и π^2 ирационалан број. Фердинанд фон Линдеман је 1882. године доказао да је π трансцендентан број, тј. да не може бити корен полинома с целобројним коефицијентима и тако потврдио да се проблем квадратуре круга, један од трију класичних проблема, не може рационално решити.

Па и поред тога, „трка за децималама броја π“ се наставља. Она више представља забаву математичара и информатичара. Тренутни рекорд од преко 13 билиона цифара, постављен октобра 2014, држи Александер Ји.

1. Примена броја π

Број π је нашао своју примену у свим наукама. Најчешће се спомиње, свакако, у математици и физици.

Пошто је дефинисан преко геометријског појма круга, прво треба споменути геометријске формуле у којима се појављује. Две најважније и најчешће коришћене јесу:

- Формула за обим круга:
$$O = 2r\pi$$
- Формула за површину круга:
$$P = r^2\pi$$

где је r полупречник круга. Друге формуле се углавном изводе из двеју наведених.

- Формула за површину ваљка:
$$P = 2r\pi(r + H)$$
- Формула за запремину ваљка:
$$V = r^2 H\pi$$
- Формула за површину купе:
$$P = r\pi(r + \sqrt{r^2 + H^2})$$
- Формула за запремину купе:
$$V = \frac{1}{3}r^2 H\pi$$
- Формула за површину лопте:
$$P = 4r^2\pi$$
- Формула за запремину лопте:
$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$
- Формула за површину елипсе:
$$P = ab\pi$$

(r – полупречник основе, односно великог круга; H – висина; a и b – полуосе)

Радијанска мера угла је одређена као дужина лука који одређује дати угао у јединичном кругу. Важе следећи односи:

- $360° = 2\pi \text{ rad}$
- $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}296°$
- $1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}0175 \text{ rad}$

У анализи број π се појављује у следећим формулама:

- Лајбницова формула:
$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{2i-1} = \frac{\pi}{4}$$

- Вијетова формула:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\cdots=\frac{2}{\pi}$$

- Валисов производ:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{\pi}{2}$$

- Вредност Риманове зета-функције у тачки 2 (Базелски проблем):

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^s}$$

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

- Вредност гама-функције у тачки $^1/_2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

- Представљање у облику верижног разломка:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}}$$

- Ојлеров идентитет који повезује пет најзначајнијих математичких константи – e, π, i, 1 и 0:

$$e^{i\pi}+1=0$$

- Стирлингова апроксимациона формула за факторијел:

$$n!\sim n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2n\pi}$$

- Површина једне четвртине јединичног круга:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

- Површина омотача ротационог тела:

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

- Запремина ротационог тела:

$$V=\pi\int_a^b(f(x))^2dx$$

- Поасонов интеграл вероватноће:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

У вероватноћи број π се среће у разним расподелама и другим изразима.

- Густина вероватноће за нормалну расподелу $N(m, \sigma^2)$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- Густина вероватноће за Кошијеву расподелу:

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

- вероватноћа да је НЗД двају случајно изабраних бројева једнак d:

$$p\{(a, b) = d\} = \frac{1}{d^2\,\zeta(2)} = \frac{6}{d^2\pi^2}$$

Примена у физици:

- Кружна фреквенција:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

- Период осциловања хармонијског осцилатора:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Период осциловања математичког клатна:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Период осциловања физичког клатна:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

- Редукована Планкова константа:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- Кулонов закон за електричну силу:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- Магнетна пермеабилност слободног простора:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{H}{m}$$

- Планков закон зрачења:

$$R(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kt}-1}}$$

- Таласна једначина Луја де Броја:

$$\Psi = Ae^{i\frac{2\pi}{h}\varphi}$$

2. Историја броја π

Историја израчунавања броја π се може подели на три периода: геометријски, класични и дигитални.

Геометријски период је почео пре око 4000 година и трајао је до почетка XVII века. За израчунавање броја π користиле су се геометријске методе, најчешће уписани и описани многоуглови. Последњи велики математичар који је на овај начин рачунао број π био је Лудолф ван Цојлен (израчунао тридесет две децимале). Важно је напоменути да се у најстаријим изворима, као што је Рајндов папирус, не спомиње експлицитно вредност броја π, већ се дају „упутства“ за проналажење обима и површине неких кругова, из чега се може извести колико би износио π.

Класични период почиње у XVII веку радовима Џона Валиса, Вилијама Броукнера, Џејмса Грегорија и Исака Њутна и траје до почетка рачунарске ере. Обележила га је употреба аналитичких метода. Коришћени су бесконачни производи и суме који конвергирају ка π.

Дигитални период почиње средином XX века првим рачунарским израчунавањем и траје до данас. У основи алгоритама који се користе леже бесконачне суме и рекурентне формуле. Најефикаснији алгоритми у једној итерацији додају десетине или чак стотине тачних децимала. Толико су компликовани да би човек тешко могао да рачуна по њима, али рачунару то не представља проблем.

Хронологија израчунавања броја π

Време	**Истраживач**	**Приближна вредност**	**Број тачних деци-мала**
20 в. п. н. е.	Вавилонци	3,125	1
17 в. п. н. е.	Рајндов папирус	$3{,}16045\ (= 4 \cdot \left({}^{8}\!/_{9}\right)^{2})$	1
250 г. п. н. е.	Архимед	3,1418 (средња вредност граница)	3
20 г. п. н. е.	Витрувије	$3{,}125\ (= {}^{25}\!/_{8})$	1
130.	Чанг Хонг	$3{,}1622\ (= \sqrt{10})$	1
150.	Клаудије Птолемеј	3,14166	3
250.	Ванг Фан	$3{,}1555\ldots\ (= {}^{142}\!/_{45})$	1
263.	Љоу Хуеј	3,14159	5
480.	Дзу Чунгџи	$3{,}14159292\ (= {}^{355}\!/_{113})$	6
499.	Арјабхата	$3{,}1416\ (= {}^{62832}\!/_{20000})$	3
640.	Брамагупта	$3{,}1622\ (= \sqrt{10})$	1
800.	Ел Хорезми	3,1416	3
1220.	Фибоначи	3,141818	3
1400.	Мадава	3,14159265359	10

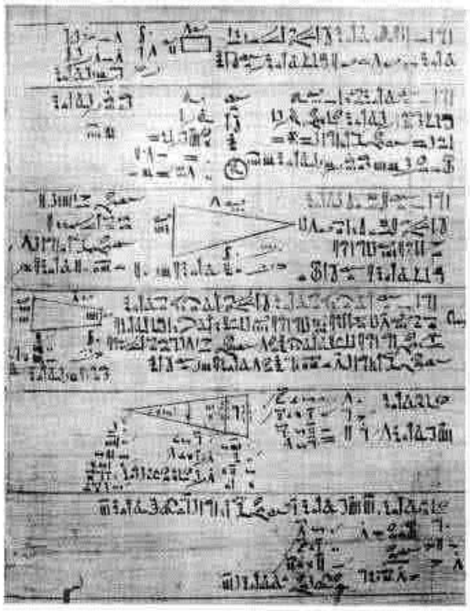
1430.	Ел Каши	3,14159265358979	14
1573.	Ото	3,1415929	6
1593.	Вијет	3,1415926536	9
1593.	Ван Ромен	3,141592653589793	16
1596	Лудолф ван Цојлен	3,14159265358979323846	20
1596.	Лудолф ван Цојлен	3,14159265358979323846264338327950288	35
1665.	Њутн	3,1415926535897932	16
1699.	Шарп		71
1700	Секи Кова		10
1730.	Камата		25
1706.	Мечин		100
1719.	Де Лањи		112
1723.	Такебе		41
1739.	Мацунага		50
1794.	Вега		136
1824.	Радерфорд		152
1844.	Страсницки, Дасе		200
1847.	Клаусен		248
1854.	Леман		261
1853.	Радерфорд		440
1874.	В. Шенкс		527

Израчунавања помоћу рачунара

Година	**Истраживач(и)**	**Модел рачунара**	**Број децимала**
1947.	Д. Ф. Фергусон	стони калкулатор	710
1947.	Д. Ф. Фергусон, Џ. Ренч	стони калкулатор	808
1949.	Л. Р. Смит, Џ. Ренч	стони калкулатор	1120
1949.	Џ. фон Нојман, Џ. Ренч, Л. Р. Смит	ENIAC	2037
1958.	Ф. Жени	IBM 704	10.000
1961.	Д. Шенкс, Џ. Ренч	IBM 7090	100.000
1973.	Ж. Гију, М. Бује	CDC-7600	1.001.250
1982.	Канада, Јошино, Тимура	HITACHI M-280H	16.777.206
1994.	браћа Чудновски		4.044.000.000
1999.	Канада, Такахаши	HITACHI SR8000	206.158.430.000
2011.	Шигеру Кондо, Александер Ји		10 билиона
2014.	Александер Ји		13,3 билиона

2.1. Геометријски период

2.1.1. Стари Египат



Најважније сведочанство о староегипатским математичким знањима јесте Рајндов математички папирус. Назив је добио по Александеру Хенрију Рајнду, шкотском колекционару египатских антиквитета који га је донео из Луксора. Сматра се да потиче из 1650. године п. н. е. и писан је египатским хијератичким писмом. Данас се чува у Британском музеју у Лондону, а мањи фрагменти се налазе у Бруклинском музеју Њујорку. Познат је и под именом Ахмесов папирус, по свом писцу Ахмесу. Уз овај, постоји још и Московски или Голенишчевљев папирус који се чува у Пушкиновом музеју у Москви и нешто је старији, али мањег обима.

Рајндов папирус садржи 87 решених задатака који се тичу практичних рачунских проблема. Решења задатака су дата у виду упутстава.

Задатак број 50 Рајндовог папируса гласи:

Пречник круга је 9 хета[1]*. Колика је површина круга?*

Од пречника одузми деветину. Остане 8. Помножи то са 8. Ето одговора – површина је 64 сетата[2]*.*

1	9
1/9	1

После одузимања остаје 8.

1	8
2	16
4	32
8	64

Површина је 64 сетата.

Како би изгледала симулација овог поступка у општим бројевима?

[1] 1 хет ≈ 52,5 m

[2] 1 сетат = 1 хет × 1 хет ≈ 0,28 ha

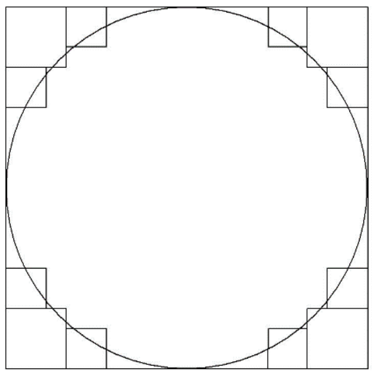
Нек је пречник круга d. Одузмемо једну деветину и остане $\frac{8}{9}d$. То помножимо самим собом и добијемо $P = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$. Ако ставимо да је $d = 2r$, где је r полупречник, добијамо

$$P = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 r^2 = \frac{256}{81} r^2.$$

Из овога се закључује да је

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}16049.$$

Исти закључак се изводи и из задатка број 48, у коме се површина круга изводи сукцесивним смањивањем површине квадрата. Поступак је следећи:



1. Нек је d пречник круга. Претпоставимо да је површина круга приближно једнака површини описаног квадрата. Тада је

$$P = d^2.$$

2. Умањимо површину квадрата за четири квадрата странице $\frac{d}{6}$. Тада је

$$P = d^2 - 4 \cdot \left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9} d^2.$$

3. Новодобијену површину умањимо за још осам квадрата странице $\frac{d}{9}$, па се добија

$$P = \frac{8}{9} d^2 - 8 \cdot \left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2.$$

Из тога следи идентичан закључак, тј.

$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}16049.$$

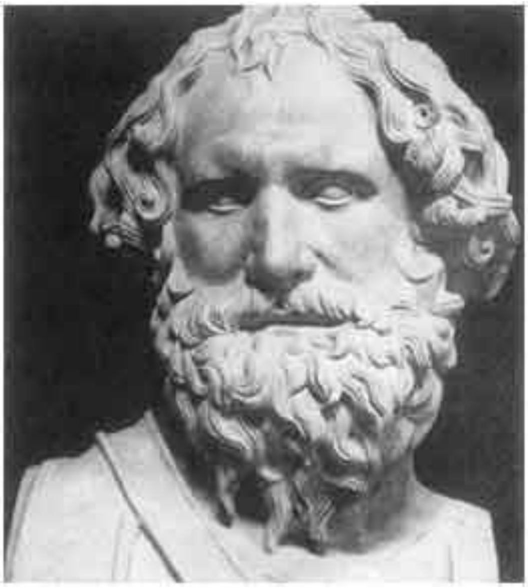
2.1.2. Вавилон

Таблица из Сузе даје формуле за израчунавање површина неких правилних многоуглова. Такође даје и однос обима уписаног шестоугла и круга као ${}^{24}\!/_{25}$, па важи:

$$\frac{24}{25} = \frac{6r}{2r\pi} \Rightarrow \frac{24}{25} = \frac{3}{\pi}$$

$$\pi = \frac{75}{24} = 3{,}125.$$

2.1.3. Стара Грчка



Архимед

Старогрчка математика је свету подарила, између осталог, методу описаних и уписаних многоуглова. Та метода је кроз историју најдуже коришћена за одређивање вредности броја π. Позната је и као Архимедова метода, јер ју је Архимед (287. п. н. е. – 212. п. н. е.) први користио у ту сврху. Замисао на којој почива ова метода је, међутим, нешто старија.

Старогрчки филозоф Антифон, који је живео у V веку п. н. е, обим круга је представио на следећи начин:

У круг се упише произвољан правилан многоугао. Затим се одреде симетрале сваке странице и тачке у којима се свака симетрала пресече с кружницом споје се са најближим двама теменима многоугла. На тај начин се добија многоугао са двоструко већим бројем страница. Понављајући овај процес доћи ће се до многоугла чији се обим може сматрати обимом круга.

Ова замисао није наишла на добар пријем међу учењацима Старе Грчке. Интуитивно схватање појма граничне вредности могло је да доведе до разних погрешних закључака. Један од таквих закључака је да је у сваком троуглу збир двеју страница једнак трећој (в. Прилог 1).

Без формалног одговора остало је питање чему тежи низ обимâ многоуглова уписаних у круг. Ипак, то није спречило разне људе да током много векова осмисле разне начине за изражавање чланова тог низа и преко њих броја π.

Потврда да је Антифонова интуиција била исправна стигла је релативно скоро, с појавом строгих метода математичке анализе у XVII и XVIII веку. Може се додати да је један од првих корака у том правцу начинио питагорејац Бризон још крајем V века п. н. е. Он је предложио да се поред уписаних посматрају и описани многоуглови. Тада ће се обим круга налазити између обимâ уписаног и описаног многоугла. Што више страна имају многоуглови, то ће прецизније бити одређен обим круга.

Архимед је исправно одредио две децимале броја π, али значај његовог израчунавање јесте у томе што је одредио границе у којима се број π налази. Пошавши од шестоугла и удвостручујући број страница све до 96-угла, одредио је да важи

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}.$$

Како важи

$$0 < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} - 3\frac{10}{71} < 10^{-4}$$

и

$$0 < 3\frac{1}{7} - \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 10^{-4},$$

уз коришћење „лепших“ бројева може се написати и

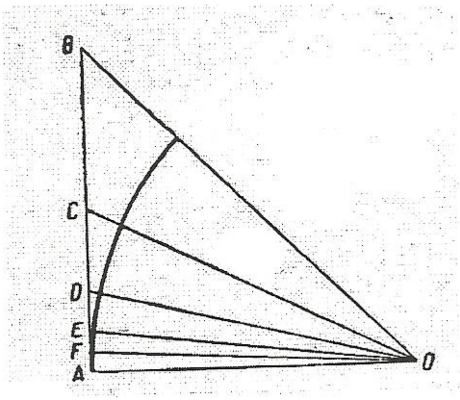
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Средња вредност границâ износи приближно $3{,}141868$, па се може рећи и да је Архимед тачно одредио три децимале.

Цео Архимедов поступак израчунавања изгледа овако:

Описани многоугао

Уместо да црта целе многоуглове, Архимед на једну дирку наноси њихове полустране. Од полустране n-угла повлачењем бисектрисе централног угла добија полустрану $2n$-угла.



Нека је AB полустрана описаног шестоугла. Тада је угао BOA једнак $30°$ и важи:

$OA{:}AB = \sqrt{3}{:}1 > 265{:}153$[3] (1)

$OB{:}AB = 2{:}1 = 306{:}153$ (2)

Даље, користећи тврђење да бисектриса дели основицу на делове пропорционалне бочним странама, за полустрану AC описаног дванаестоугла добија се:

$OB{:}OA = BC{:}CA$

---

[3] Ова апроксимација за $\sqrt{3}$ има завидну прецизност: $\sqrt{3} - {}^{265}/_{153} < 3 \cdot 10^{-5}$. Није познато како је Архимед дошао до ове приближне вредности, као што није познато ни за приближне вредности осталих овде коришћених квадратних коренова. У овом случају, могуће је да се користио развојем броја $\sqrt{3}$ у верижни разломак: $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\ddots}}}}$. Ако се узме девет чланова низа, добија се вредност ${}^{265}/_{153}$.

$$(OB + OA): OA = (BC + CA): CA$$

$$(OB + OA): OA = BA: CA$$

$$(OB + OA): BA = OA: CA$$

Сабирајући (1) и (2) добија се

$$(OB + OA): BA = (265 + 306): 153 = 571: 153,$$

па је

$$OA: CA = 571: 153, \tag{3}$$

тј.

$$OA = 571k, CA = 153k.$$

За одређивање односа $OC: CA$ користимо чињеницу да је OC хипотенуза троугла OAC, па је

$$OC^2 = CA^2 + OA^2,$$

а због (3) важи

$$OA^2 + CA^2 = (571^2 + 153^2)k^2$$

$$OC^2 = (571^2 + 153^2)k^2$$

$$OC^2: CA^2 = (571^2 + 153^2): 153^2 = 349450: 23409$$

$$OC: CA > 591\frac{1}{2}: 153$$

На исти начин се за полустрану AD описаног 24-угла добија

$$OA: DA > 1162\frac{1}{8}: 153$$

$$OD: DA > 1172\frac{1}{8}: 153$$

За 48-угао важи

$$OA: EA > 2334\frac{1}{4}: 153$$

$$OE: EA > 2339\frac{1}{4}: 153,$$

а за 96-угао

$$OA: AF > 4673\tfrac{1}{2}: 153$$

Однос полупречника OA према полустрани 96-угла исти је као однос пречника према целој страни, што значи да је однос пречника према целом обиму

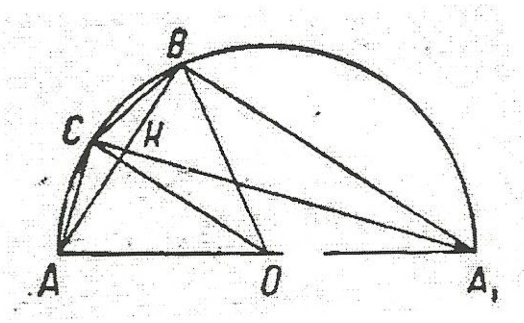
$$\frac{2r}{O_{96}} > 4673\frac{1}{2}:(153\cdot 96) > 4673\frac{1}{2}:14688,$$

а однос обима према пречнику је

$$\frac{O_{96}}{2r} < 14688:4673\frac{1}{2} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}.$$

Уписани многоугао

Полази се од странице AB уписаног n-угла. Спајањем B са крајем A_1 пречника AA_1 добија се правоугли троугао. Кад се повуче бисектриса OC угла AOB добија се AC, које је страна $2n$-угла. Повлачењем дужи CA_1 и угао AA_1B ће се поделити на пола (централни и периферијски углови). То значи да и када се угао код A_1 дели на пола добија се страница многоугла с удвострученим бројем страна.



Троуглови ACA_1 и KCA су слични ($\sphericalangle CAK \equiv \sphericalangle CAB = \sphericalangle CA_1B = \sphericalangle CA_1A$, пошто одговарају луку BC; $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle CKA$ – заједнички), па важи

$$CA_1:AC = AC:CK = A_1A:AK. \qquad (1)$$

A_1C је бисектриса угла BA_1A па је и

$$AA_1:AK = A_1B:BK \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следи:

$$CA_1:AC = (AA_1 + A_1B):(AK + BK)$$

$$CA_1:AC = (AA_1 + A_1B):AB$$

У случају шестоугла важи

$$CA_1:AC = \left(2+\sqrt{3}\right):1$$

итд.

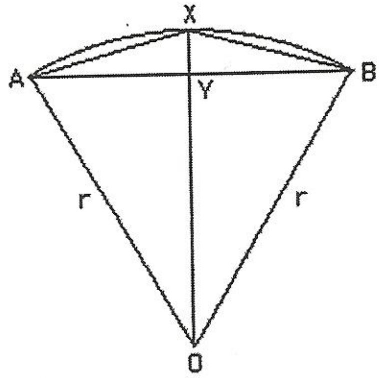
На исти начин као код описаних многоуглова, за уписани 96-угао се добија однос обима према пречнику.

$$\frac{O_{96}}{2r} > (66\cdot 96):2017\frac{1}{4} > 6336:2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}$$

2.1.4. Кина

Двојица кинеских математичара који су се бавили израчунавањем броја π јесу Љоу Хуеј и Дзу Чунгџи.

Љоу Хуеј је живео у III веку. У делу „Девет књига“ је дат његов поступак израчунавања. Он је користио рекурентну везу којом се обим правилног многоугла с $3 \cdot 2^n$ страница изражава преко обима многоугла с $3 \cdot 2^{n-1}$ страница користећи Питагорину теорему.



Нека је O центар круга, $AB = p_{n-1}$ страница уписаног многоугла с $3 \cdot 2^{n-1}$ страница, а X и Y тачке пресека бисектрисе угла AOB с кружницом, односно AB. Важе једнакости:

$$AY = \frac{1}{2}AB$$

$$OY = \sqrt{r^2 - \left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2}$$

$$YX = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2}$$

Из Питагорине теореме следи

$$AX = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r - {p_{n-1}}^2}\right)} = p_n$$

Стављајући да је $r = 1$ и $p_1 = 1$, као страница шестоугла, приближна вредност броја π после n-те итерације биће $\frac{np_n}{2}$.

Љоу Хуеј се зауставио после десете итерације добивши да је $\pi \approx 3{,}141592104.$

Дзу Чонгџи је живео у V веку. Своју математичку заоставштину је забележио у тексту „Метода интерполације“. Тај текст је садржао формуле за запремину сфере, кубне једначине и вредност броја π. Нажалост, ово дело није стигло до нас, изгубљено је од времена династије Сунг.

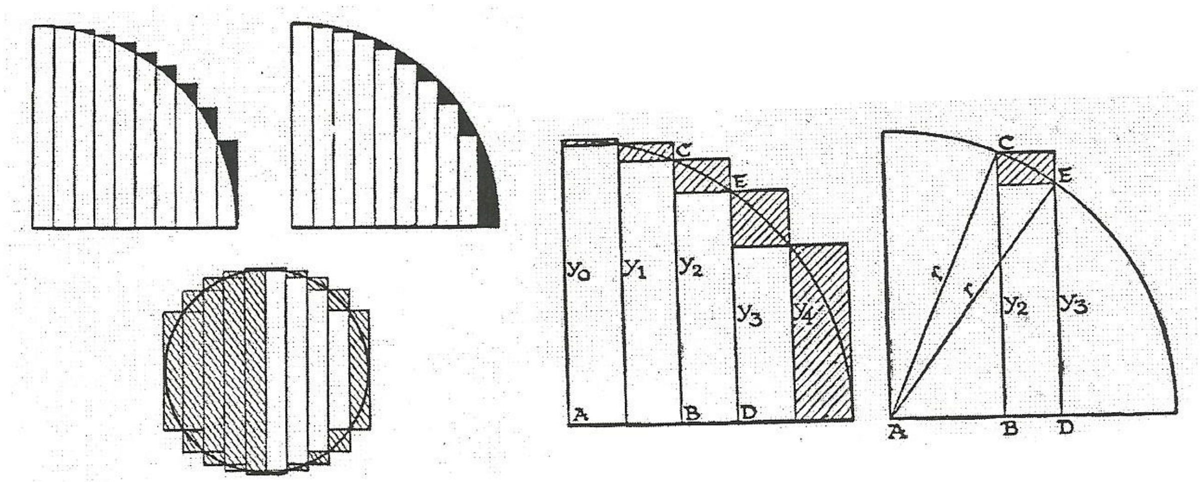
Он је одредио да се број π налази између $3{,}1415926$ и $3{,}1415927$ и као добру рационалну апроксимацију предложио $\frac{355}{113}$. Захваљујући Ли Чуенфенгу, који је у VII веку саставио историју династије Сунг, знамо да је користио уписани 24576-угао. Остаће, ипак, нејасно како је дошао до рационалне апроксимације.

Ученици Математичке гимназије
код бисте Дзу Чунгџија у Пекингу

2.1.5. Јапан

Јапански математичари који су се бавили бројем π били су Секи Кова, Тошикијо Камата, Катахиро Такебе и Јошисуке Мацунага.

Метода коју су они користили заснива се на налажењу површине круга и у суштини представља интергаљење.



Четвртина круга се еквидистантним линијама издели на одређен број стубића. Види се да стубића који обухватају ту фигуру („спољних“, „описаних“) има за један више од стубића који се налазе у њој („унутрашњих“, „уписаних“). Узмимо да је полупречник једнак 1 и да се за почетак дели на пет делова. Ширина сваког правоугаоника је $\frac{1}{5}$. Укупна површина „описаних“ правоугаоника за четвртину круга износи

$$\frac{1}{5}y_0 + \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{1}{5}y_4$$

а за цео круг

$$P_{\text{о}} = \frac{4}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Укупна површина „уписаних“ правоугаоника за четвртину круга износи

$$\frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3 + \frac{1}{5}y_4$$

а за цео круг

$$P_{\text{у}} = \frac{4}{5}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Вредност y_0 је једнака r, а вредности осталих висина се налазе применом Питагорине теореме и износе

$$y_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2}$$

$$y_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$y_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2}$$

Сада се могу наћи површине:

$$P_{\text{о}} = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2}\right) \approx 3{,}44$$

$$P_{\text{у}} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2}\right) \approx 2{,}64$$

Како је $r = 1$, површина круга ће износити π, што значи да смо добили

$$2{,}64 < \pi < 3{,}44$$

тј.

$$\pi = 3{,}04 \pm 0{,}40$$

Ако преко π_n означимо процену вредности броја π при подели четвртине круга на n делова, добијамо следеће:

$$\pi_5 = 3{,}04 \pm 0{,}40$$

$$\pi_{10} = 3{,}10 \pm 0{,}20$$

$$\pi_{15} = 3{,}12 \pm 0{,}14$$

$$\pi_{20} = 3{,}13 \pm 0{,}10$$

Правило за налажење површине спољних правоугаоника се може уопштити на следећи начин:

$$P = \frac{4}{n^2}\left(n + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \sqrt{n^2 - 4^2} + \cdots\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{n^2 - i^2}$$

Ако је n бесконачно велико добија се

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{n^2 - i^2} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} = 4\int_0^1\sqrt{1 - x^2}dx$$

2.1.6. Индија

Математичар и астроном Аријабхата (476 – 550) је у делу „Сурја сиданта“ дао вредност броја π имплицитно, као што је дато у Ахмесовом папирусу. Стихови који садрже овај податак гласе:

Додај 4 на 100. Помножи са 8 и додај 62.000. Овим правилом може се рачунати обим за круг пречника 20.000.

$$(4 + 100) \cdot 8 + 62.000 = 20.000 \cdot \pi$$

$$\pi = \frac{62.832}{20.000} = 3{,}1416$$

Други староиндијски математичар, Брамагупта, за број π користи вредност $\sqrt{10}$. Та вредност је добијена из Архимедових многоуглова. Уписани у круг пречника 10, многоуглови са 12, 24, 48 и 96 страна имају обиме $\sqrt{965}$, $\sqrt{981}$, $\sqrt{986}$, $\sqrt{987}$, што је навело на погрешан закључак да ће се при повећању броја страна обим приближити вредности $\sqrt{1000}$, па би онда било

$$\pi = \frac{\sqrt{1000}}{10} = \sqrt{10} \approx 3{,}162277$$

2.1.7. Лудолф ван Цојлен

Лудолф ван Цојлен (Ludolph van Ceulen) је био холандски математичар немачког порекла. Рођен је 1540. у Хилдесхајму, а умро у Лајдену 1610. Његова породица није била нарочито богата, те је могао себи да приушти само основно образовање, не и универзитетско. То му је знатно отежало научни рад и због чињенице да није могао да чита латинске и старогрчке књиге које су биле главни извор знања у то време.

Велики део свог живота Ван Цојлен је посветио израчунавању вредности броја π. Први резултат, са 20 децимала, објавио је 1596. у својој књизи *О кругу* (*Vanden circkel*). Метода коју је користио била је Архимедова метода уписаних и описаних многоуглова. За поменути резултат користио је многоугао са $60 \cdot 2^{33} = 515396075520$ страница.

Касније Ван Цојлен поправља свој резултат на 35 децимала, примењујући исту методу на многоугао са 2^{62}страница.

Формуле које је користио су

$$S_{2n} = \frac{2s_nS_n}{s_n + S_n}$$

$$s_{2n} = \sqrt{s_nS_{2n}}$$

где је S_n обим описаног n-угла, а s_n обим уписаног n-угла.

Сахрањен је у цркви св. Петра у Лајдену, а епитаф је садржао следећи текст:

„Ако је пречник 1*, онда је обим већи од*

$$3{,}14159265358979323846264338327950288/100000000000000000000000000000000000$$

али мањи од

$$3{,}14159265358979323846264338327950289/100000000000000000000000000000000000$$

Али, ако је пречник

$$100000000000000000000000000000000000,$$

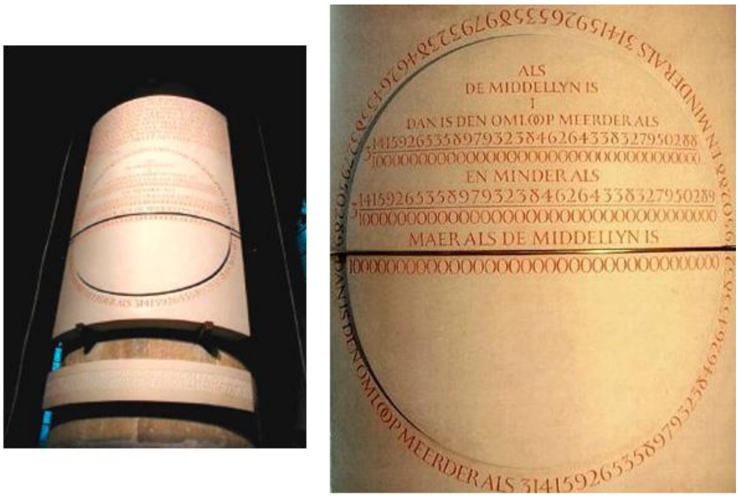
онда је обим већи од

$$314159265358979323846264338327950288$$

а мањи од

314159265358979323846264338327950280“

Овај епитаф је временом изгубљен, али је јула 2000. постављен нови, копија претходног.



Нови епитаф

2.2. Класични период

Иако се узима да класични период почиње у XVII веку, пионир аналитичког израчунавања броја π био је Франсоа Вијет (1540 – 1603). Његова формула за број π гласи:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot \ldots$$

Израз на десној страни треба тумачити као граничну вредност

Франсоа Вијет

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2} = \frac{2}{\pi}$$

где је

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

$$a_1 = \sqrt{2}$$

После сређивања добија се

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} = \pi$$

где има $n+1$ коренова.

Доказ:

Коришћењем формуле за синус двоструког угла

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

најпре треба доказати једнакост

$$\frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x} = \prod_{i=0}^{n-1} \cos(2^i x)$$

која важи за све позитивне целе бројеве n. Ако се узме да је $x = \frac{y}{2^n}$ и ако се обе стране једнакости поделе са $\cos\frac{y}{2}$, биће:

$$\frac{\sin y}{\cos\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2^n\sin\frac{y}{2^n}}=\prod_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{y}{2^{i+1}}\right)$$

Поновном употребом формуле за синус двоструког угла $\sin y = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$ добија се

$$\frac{2\sin\frac{y}{2}}{2^n\sin\frac{y}{2^n}}=\prod_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{y}{2^{i+1}}\right)$$

Ако заменимо y са π добијамо једнакост

$$\frac{2}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\prod_{i=0}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^i}\right)$$

Остаје да се чиниоци на десној страни ове једнакости повежу с одговарајућим a_n. Ако се сада употреби формула за косинус полуугла

$$2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2+2\cos x}$$

добија се да

$$b_i=2\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}$$

задовољава рекурзивну везу

$$b_i=\sqrt{2+b_i}$$

с почетним условом

$$b_1=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}=a_1$$

Зато је $a_n=b_n$ за све позитивне целе бројеве n.

Вијетова формула се добија кад се узме да $n\to\infty$. Овде треба применити да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$$

као последица чињенице да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

Године 1670. шкотски математичар Џејмс Грегори открио је следећи ред:

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1},$$

али није уочио његову везу с бројем π. Три године касније Лајбниц открива ред

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots,$$

који је заправо специјални случај реда Грегорија за $x = 1$. Тако су отворена врата нове ере у израчунавању броја π.

Лајбницов ред, међутим, не краси велика ефикасност. Да би се тачно одредиле две децимале, потребно је узети 50 чланова реда, а за три децимале – више од 300.

Абрахам Шарп је 1699. овом методом нашао 71 децималу броја π, тадашњи рекорд. „Трик“ је био веома једноставан: у Грегоријевој формули је ставио $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тако добио

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \cdots\right).$$

Овај ред знатно брже конвергира и већ у шестој итерацији даје три исправне децимале, а у дванаестој шест исправних децимала.

„Трик“ који су математичари користили био је одабир комбинација аркус тангенса чији развоји у редове брзо конвергирају. Неки од њих су:

$\operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ (Џ. Мечин)

$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ (Л. Ојлер)

$\operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99}$ (Џ. Стирлинг, Т. Симпсон, В. Радерфорд)

$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$ (Л. К. Шулц)

Овакве формуле се још називају *мечиновске*.

И Исак Њутн, један од највећих научника свих времена, учествовао је у израчунавању броја π. Једна од његових формула је

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{7}(1 + \cdots)\right)\right)$$

Исак Њутн

Пошто је $\pi = \operatorname{arctg} 1$, може се писати и

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k!}{(2k+1)!!}$$
$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{16}{693} + \frac{32}{3003} + \frac{32}{6435}$$

Овом формулом је нашао 15 децимала.

Друга његова формула је

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} \cdots$$

уз коришћење

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

2.3. Рачунарски период

Вилијам Шенкс је 1874. користећи неку од мечиновских формула нашао 707 децимала броја π. Тим резултатом је држао рекорд све до средине XX века. Међутим, већ прве послератне рачунарске провере показале су да је погрешио на 528. месту, тако да цео преостали „реп“ од 180 цифара био неисправан.

Појављивањем рачунара, трка за цифрама броја π се нагло убрзала. Јуна 1949. Џон фон Нојман и његови сарадници су израчунали 2037 цифара на рачунару типа „ENIAC“. Граница од 10.000 цифара достигнута је 1958. године на рачунару IBM 704 (Ф. Жени). Сто хиљада цифара достигли су Данијел Шенкс и Џон Ренч 1961. године рачунаром IBM 7090. До првог милиона стигли су Жан Гију и М. Бује 1973. године, за шта је било потребно мање од једног дана рада рачунара CDC-7600.

Улога човека у задатку израчунавања што већег броја цифара броја π се променила. На њему више није да рачуна, већ да смишља суперефикасне алгоритме које ће рачунар извршавати.

Године 1987. канадски математичари Џонатан и Питер Борвејн су открили задовољујући ред:

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!\left(5280\left(236674+30303\sqrt{61}\right)\right)^{3n+\frac{3}{2}}} \cdot \left(212175710912\sqrt{61}+1657145277365 + n\left(13773980892672\sqrt{61}+107578229802750\right)\right)\right\}$$

У члан додаје око 25 тачних децимала!

Један још ефикаснији алгоритам браће Борвејн је следећи:

На почетку поставимо $y_0 = \sqrt{2}-1$ и $a_0 = 6-4\sqrt{2}$ и примењујемо следеће формуле:

$$y_{n+1} = \frac{1-\sqrt[4]{1-{y_n}^4}}{1+\sqrt[4]{1+{y_n}^4}}$$

$$a_{n+1} = (1+y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1+y_{n+1}+{y_{n+1}}^2)$$

Величина $\frac{1}{a_n}$ представља приближну вредност броја π. Свака итерација број тачних децимала увећава више од четири пута. Тако се већ за a_4 добијају 694 тачне децимале.

2.4. Метода Монте Карло

Метода Монте Карло је статистичка метода примењена на симулацији података. Под симулацијом се подразумева метод којим се скупу случајно генерисаних бројева даје улога података. Ову методу су четрдесетих година прошлог века развили Станислав Улам, Џон фон Нојман и Николас Метрополис.

Један од начина за одређивање броја π овом методом је следећи:

У квадрат упишемо круг. Нека је d пречник круга, односно страница квадрата. Тада је површина круга $P_1 = \frac{d^2}{4}\pi$, а површина квадрата $P_2 = d^2$. Бацимо на квадрат један по један насумично n новчића. Нека се од њих k новчића нађе у кругу. Тада ће важити $k: n \approx P_1: P_2$, тј. $k: n \approx \frac{d^2}{4}\pi: d^2$, па се добија да је $\pi \approx 4\frac{k}{n}$. Што се више бацања изврши, биће већа вероватноћа да се добијени резултат нађе у интервалу $[\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$, за неку изабрану малу вредност ε.

За рачунарску симулација се може користити четвртина јединичног круга. Бацање новчића би се симулирало генерисањем двају случајних бројева x и y из интервала $[0,1]$ који представљају координате тачке. Величина $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ представља удаљеност тачке од координатног почетка. Уколико је $d < 1$, рачуна се да је новчић упао у круг.

3. Ирационалност

Ламберт

Ирационалност броја π први је доказао Јохан Хајнрих Ламберт 1761. године. Пошао је од претпоставке да се тангенс може представити верижним разломком у облику

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

Онда се доказ сводио на чињеницу да ако је x веће од нуле и рационално, онда овај израз мора бити ирационалан. Из $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ следи да је $\frac{\pi}{4}$ ирационалан и да је, такође, π ирационалан број. Напредне доказе су дали Иван Нивен, Шарл Ермит и Мери Картрајт.

Нивенов доказ

Овај доказ користи карактеризацију π као најмању позитивну нулу синусне функције.

Припрема:

Претпоставиомо да је π рационалан, односно да је $\pi = \frac{a}{b}$ за целе бројеве $a, b \neq 0$, који се може узети без губитка општости да буде позитиван. Узимајући било који позитиван цео број n, дефинишемо полином функције

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

и означавамо са

$$F(x) = f(x) + \cdots + (-1)^j f^{(2j)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x), x \in \mathbb{R}$$

наизменичну суму функције f и њених првих n извода.

Тврдња 1:

$F(0) + F(\pi)$ је цео број.

Доказ:

Проширимо f као збир монома, коефицијент уз x^k је број облика $\frac{c_k}{n!}$ где је c_k цео број који је 0 ако је $k < n$. Дакле, $f^{(k)}(0)$ је 0 када је $k < n$ и једнако је $\frac{k!}{n!}c_k$ ако је $n \leq k \leq 2n$; у сваком од случаја $f^{(k)}(0)$ је цео број, па стога следи да је и $F(0)$ цео број.

С друге стране, $f(\pi - x) = f(x)$ као и $(-1)^k f^{(k)}(\pi - x) = f^{(k)}(x)$ за сваки ненегативан цео број k. У посебном случају $(-1)^k f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$. Следи да је $f^{(k)}(\pi)$ цео број као и $F(\pi)$. Како су $F(0)$ и $F(\pi)$ цели бројеви, онда је и њихова сума цео број.

Тврдња 2:

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = F(0) + F(\pi)$$

Доказ:

Како је $f^{(2n+2)}$ нула полинома, имамо

$$F'' + F = f$$

Изводи синуса и косинуса су дати са $\sin' = \cos$ и $\cos' = -\sin$. Отуда следи правило:

$$(F' \cdot \sin - F \cdot \cos)' = f \cdot \sin$$

Из основне теореме математичке анализе

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x$$

Како је $\sin 0 = \sin\pi = 0$ и $\cos 0 = -\cos\pi = 1$, Тврдња 2 је доказана.

Закључак:

Како је $f(x) > 0$ и $\sin x > 0$ за $0 < x < \pi$, Тврдња 1 и Тврдња 2 показују да је $F(0) + F(\pi)$ позитиван цео број. Како је $0 \le x(a - bx) \le \pi a$ и $0 \le \sin x \le 1$ за $0 \le x \le \pi$ имамо од оригиналне дефиниције f

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx \le \pi\frac{(\pi a)^n}{n!}$$

Који је мањи од 1 за велико n, дакле $F(0) + F(\pi) < 1$ за ове n, што следи из Тврдње 2. Ово је немогуће за позитивне целе бројеве $F(0) + F(\pi)$.

Доказ изнад је дотерана верзија

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(f^{(2j)}(\pi) + f^{(2j)}(0)\right) + (-1)^{n+1}\int_0^{\pi} f^{(2n+2)}(x)\sin x\,dx$$

Који су добијени $2n + 2$ интеграцијом по деловима. Тврдња 2 суштински успоставља ову формулу, где употреба сакрива поновљену интеграцију по деловима. Последњи интеграл нестаје јер је $f^{(2n+2)}$ нула полинома. Тврдња 1 показује да је преостали збир цео број.

Нивенов доказ је близак Ермитовом иако се то на први поглед можда не види, а веза лежи у чињеници да је Ермит већ поменуо да ако је полиномска функција и

$$F = f - f^{(2)} + f^{(4)} \mp \cdots,$$

онда

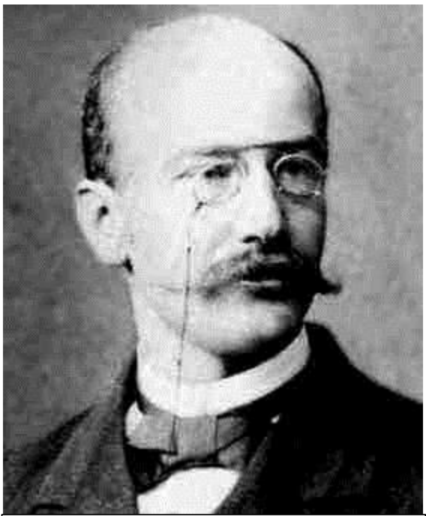
$$\int f(x)\sin x\,dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x,$$

из чега следи

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = F(\pi) + F(0).$$

4. Трансцендентност

Трансцендентност је својство броја да не може да представља корен полинома с целим коефицијентима.



Фон Линдеман

Да је π трансцендентан доказао је Фердинанд фон Линдеман 1882. године. У свом доказу се руководио методама којима је девет година раније Шарл Ермит доказао трансцендентност броја e. Свој доказ, који се протеже на 13 страна тешке математике, Линдеман је објавио у раду *Über die Zahl*. Карл Вилхелм Вајерштрас је око 1885. појedноставио Линдеманов доказ, те је он познат и као Линдеман-Вајерштрасова теорема или Ермит-Линдеман-Вајерштрасова теорема.

Овим доказом и Ламбертовим доказом о ирационалности стављена је тачка на питање решивости квадратуре круга. После неколико хиљада година покушавања доказано је да се тај проблем не може рационално решити.

Закључак

Развој наше свести о броју π је текао упоредо с развојем човечанства. Некада је био потребан мукотрпан рад да би се одредиле две или три децимале, а данас су нам познати билиони децимала.

Број π је тако близу, а тако далеко. Кодиран је у сваком кругу који видимо око себе, а ипак толико недокучив. Људи су толико фасцинирани њиме да је добио и свој дан, 14. март. Тај датум је изабран према његовим првим трима цифрама, а то је и рођендан Алберта Ајнштајна.

Рачунање децимала броја π је постало спорт за математичаре и информатичаре, игра којој никад неће доћи крај. А ако бисте питали Ричарда Фајнмана, он би вам рекао да зна како се завршава та игра и изрецитовао би вредност броја π до 767. децималног места, завршавајући са „девет, девет, девет, девет, девет, девет и тако даље“.

```
         3.14159265358979323846264338327
       5028841971693993751058209749445923
      07816406286208998628034825342117067
      9821      48086         5132
     823        06647        09384
    46          09550        58223
    17          25359        4081
                2848         1117
                4502         8410
                2701         9385
               21105        55964
               46229        48954
               9303         81964
               4288         10975
              66593         34461
             284756         48233
             78678          31652       71
            2019091         456485      66
           9234603           48610454326648
          2133936            0726024914127
          3724587             00660631558
          817488               152092096
```

Прилози

Прилог 1:

Доказ да је збир двеју страница троугла једнак трећој

Посматрајмо троугао ABC и нека су D, E и F средине страница. Тада важи $DF = \frac{1}{2}BC$ и $EF = \frac{1}{2}AB$ (средње линије), па је дужина изломљене линије $ADFEC$ једнака збиру дужина AB и BC. Ако преко G, H, I, J, K и L означимо средине страница троуглова ADF и FEC, добијамо да је дужина изломљене линије $AGKHFILJC$ једнака дужини $ADFEC$, па самим тим и збиру дужина AB и BC.

Овакав процес „уситњавања“ можемо вршити произвољан број пута и дужина добијене изломљене линије ће увек бити једнака $AB + BC$. Такође, одсечци који чине изломљену биће све краћи и крајеви ће им бити све ближи страници AC, све док се не „слију“ у њу. То значи да је дужина изломљени једнака дужини AC, па за произвољан троугао важи

$$AB + BC = AC.$$

Прилог 2: „πесмице“

Популаран и једноставан начин за запамћивање већег броја цифара броја π јесу текстови у којима свака реч има број слова који одговара једној цифри. За „кодирање“ цифре 0, која се први пут појављује на 32. децималном месту, најчешће се користе речи од десет слова. Овакви текстови су код нас познати као „πесмице“.

Овде су неки примери „πесмица“ на разним језицима.

Српски језик

Чак и Грци и стари Вавилонци су казали: обиме кад делиш круговим пречником добијаш неопходан нам пи. (17 цифара)

Руски језик

Это я знаю и помню прекрасно:
Пи многие знаки мне лишни, напрасны.
Доверимся знаньям громадным
Тех, пи кто сосчитал, цифр армаду.
(21 цифра)

Кто и шутя и скоро пожелаетъ
Пи узнать, число ужѣ знаетъ.
(11 цифара, дореволуциони правопис)

Француски језик

Que j’aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l’admirable procédé, l’œuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
Ô quadrature! Vieux tourment du philosophe

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l’espace plan circulaire?
Former un triangle auquel il équivaudra?

Nouvelle invention: Archimède inscrira
Dedans un hexagone; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s’y tiendra:
Dédoublera chaque élément antérieur;

Toujours de l’orbe calculée approchera;
Définira limite; enfin, l’arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.

Друга варијанта прве строфе:

Que j’aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Glorieux Archimède, artiste ingénieur,
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,
Soit ton nom conservé par de savants grimoires.

(127 цифара)

Енглески језик

It's a fact
A ratio immutable
Of circle round and width
Produces geometry's deepest conundrum
For as the numerals stay random
No repeat lets out its presence
Yet it forever stretches forth
Nothing to eternity.
(35 цифара, за означавање цифре 0 коришћена је реч *nothing*)

Sir, I send a rhyme excelling,
In sacred truth and rigid spelling,
Numerical sprites elucidate,
For me the lexicon's full weight,
If nature gain, not you complain
Tho' Dr Johnson fulminate.
(31 цифра)

Кинески језик

Због специфичности кинеског писма, не може се говорити о броју слова у речи на онај начин како смо ми на то навикли. Стога се прибегава другом решењу: цифре се „кодирају" помоћу слогова који звуче слично као речи за одговарајуће цифре.

Shān diān yí sì yì hú jiǔ 山 巅 一 寺 一 壶 酒	На врху планине храм и крчаг вина
Ěr lè kǔ shā wú 尔 乐 苦 煞 吾	Твоја срећа ми ствара горчину
Bǎ jiǔ chī jiǔ shā ěr 把 酒 吃 酒 杀 尔	Узми мало вина и попиј; вино ће те убити
Shā bù sǐ lè ěr lè 杀 不 死 乐 尔 乐	Ако те не убије, ја ћу се радовати твојој срећи

(23 цифре)

Цифре на кинеском:

1: 一 yī	2: 二 èr	3: 三 sān	4: 四 sì	5: 五 wǔ	6: 六 liù
7: 七 qī	8: 八 bā	9: 九 jiǔ	0: 零 líng	децимална запета: 点 diǎn	

Прилог 3: Прве три хиљаде децимала броја π

3,
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989
3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151
5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983
8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012
8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744
9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912
9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511
2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745
5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955
3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356
6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000
8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548
1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542
5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383
8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511
7392984896 0841284886 2694560424 1965285022 2106611863
0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287
4677646575 7396241389 0865832645 9958133904 7802759009
9465764078 9512694683 9835259570 9825822620 5224894077

2671947826 8482601476 9909026401 3639443745 5305068203
4962524517 4939965143 1429809190 6592509372 2169646151
5709858387 4105978859 5977297549 8930161753 9284681382
6868386894 2774155991 8559252459 5395943104 9972524680
8459872736 4469584865 3836736222 6260991246 0805124388
4390451244 1365497627 8079771569 1435997700 1296160894
4169486855 5848406353 4220722258 2848864815 8456028506
0168427394 5226746767 8895252138 5225499546 6672782398
6456596116 3548862305 7745649803 5593634568 1743241125
1507606947 9451096596 0940252288 7971089314 5669136867
2287489405 6010150330 8617928680 9208747609 1782493858
9009714909 6759852613 6554978189 3129784821 6829989487
2265880485 7564014270 4775551323 7964145152 3746234364
5428584447 9526586782 1051141354 7357395231 1342716610
2135969536 2314429524 8493718711 0145765403 5902799344
0374200731 0578539062 1983874478 0847848968 3321445713
8687519435 0643021845 3191048481 0053706146 8067491927
8191197939 9520614196 6342875444 0643745123 7181921799
9839101591 9561814675 1426912397 4894090718 6494231961

Литература

[1] Милан Божић: *Преглед историје и филозифије математике*, ЗУНС, Београд 2002.

[2] А. В. Жуков: *О числе* π, Московский центр непрерывного матеатического образования, Москва 2002.

[3] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић: *Анализа са алгебром за 4. разред Математичке гимназије*, Круг, Београд 2013.

[4] Дарко Капор: *Физика – закони и формуле*, Змај, Нови Сад 2007.

[5] Ричард Курант, Герберт Роббинс: *Что такое математика?*, МЦНМО, Москва 2007.

[6] Душко Летић, Ненад Цакић, Бранко Давидовић: Енциклопедија математичких константи, Београд 2010.

[7] Дирк Ј. Стројк: *Кратак преглед историје математике*, ЗУНС, Београд 1991.

[8] Драгослав Херцег: *Математичке формуле*, Змај, Нови Сад 2002.

[9] http://mathworld.wolfram.com/

[10] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/

[11] www.wikipedia.org